Uitwerking

Opg. 1

a/ Bijv. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, dit zijn de pivotkolommen van A.

b/ Omdat $NUL(A) = NUL(B)$ lossen we op $B\underline{x} = \underline{0}$.
We beschouwen daarom:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \uparrow \\ \cdot -1 \quad \uparrow \cdot -1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \uparrow \cdot -1\frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -4\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu volgt $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 + 4\frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_3 = -x_4 - 1\frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_6 = -2x_7 \\ x_2, x_4, x_5, x_7 \text{ zijn vrij} \end{cases}$

Dus:

$$\underline{x} \in NUL(A) \iff \underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

waarbij $x_2, x_4, x_5, x_7 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt: $NUL(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

en $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van $NUL(A)$

c/ Pas het Rangtheorema toe op A^T, dan volgt:

$$\dim(NUL(A^T)) = 4 - \dim(COL(A^T)) = 4 - \dim(ROW(A))$$
$$= 4 - \dim(COL(A)) = 4 - 3 = 1$$

Opg. 2 a) $\underline{x} \in W^{\perp} \iff \underline{x} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ en $\underline{x} \perp \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Beschouw derhalve: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{+1}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] (\times \tfrac{1}{2})$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt: $W^{\perp} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

en bijv. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van $W^{\perp}$

b) We construeren eerst m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een orthogonale basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ van W.

Neem: $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-4}{14}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = 7\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu volgt:

$$\underline{w} = \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \frac{10}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-3\end{bmatrix} + \frac{34}{238}\begin{bmatrix}-5\\4\\14\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\2\\-2\end{bmatrix}$$

($\underline{w}$ is de orthogonale projectie van $\underline{v}$ op W)

$$\underline{u} = \underline{v} - \underline{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(uiteraard kan men $\underline{u}$ ook vinden door $\underline{v}$ te projecteren op $W^{\perp}$)

Opg. 3 a) Juist, immers $(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) =$

$$\underline{u}\cdot\underline{u} - (\underline{u}\cdot\underline{v}) + (\underline{v}\cdot\underline{u}) - (\underline{v}\cdot\underline{v}) =$$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{u}$

$$\underline{u}\cdot\underline{u} - \underline{v}\cdot\underline{v} = \|\underline{u}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 = 0$$

$\|\underline{u}\| = \|\underline{v}\|$

Conclusie: $(\underline{u}+\underline{v}) \perp (\underline{u}-\underline{v})$ $\boxtimes$

b) Juist, immers $\begin{bmatrix}a_2-a_3\\a_3-a_1\\a_1-a_2\end{bmatrix}\cdot\underline{a} =$

$$(a_2-a_3)a_1 + (a_3-a_1)a_2 + (a_1-a_2)a_3 = 0$$

en $\begin{bmatrix}a_2-a_3\\a_3-a_1\\a_1-a_2\end{bmatrix}\cdot\underline{b} = a_2-a_3+a_3-a_1+a_1-a_2 = 0$

Dus $\begin{bmatrix}a_2-a_3\\a_3-a_1\\a_1-a_2\end{bmatrix} \perp \underline{a}$ en $\begin{bmatrix}a_2-a_3\\a_3-a_1\\a_1-a_2\end{bmatrix} \perp \underline{b}$.

Hieruit volgt : $\begin{bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_3 - a_1 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} \in \left(\text{Span}\{\underline{a}, \underline{b}\} \right)^{\perp}$

$\boxtimes$

(Ter info: $\begin{bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_3 - a_1 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$ wordt het uitwendig produkt (cross product) van de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ genoemd, notatie $\underline{a} \times \underline{b}$)

c) Juist, daar U orthonormale kolommen heeft weten we dat $U^T U = I$ en omdat U vierkant is (en dus U^T ook) volgt m.b.v. het inverse-matrix-theorema dat U inverteerbaar is. Uit $U^T U = I$ volgt nu $(U^T U)U^{-1} = I U^{-1}$, dus $U^T(UU^{-1}) = U^{-1}$ en $U^T = U^{-1}$ $\boxtimes$

Opg. 4 Invullen v/d 3 punten geeft het stelsel vgl^n

$$A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \underline{b} \quad \text{waarbij } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

We vinden nu de unieke k.k.o. door op te lossen $A^T A \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = A^T \underline{b}$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \beta_0 = 7\tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad \beta_1 = -\frac{27}{14}$$

De gezochte kromme is dus $y = 7\frac{1}{2} - \frac{27}{14} 2^x$